Gabarito prova P3 (08/07/11) GR-11L

EXO 1

a) A flecha deve passar inteiramente dentro do espaço definido por 2 raios consecutivos, correspondendo a um ângulo $\Delta\theta = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.
$= \frac{1}{8}$ rev.

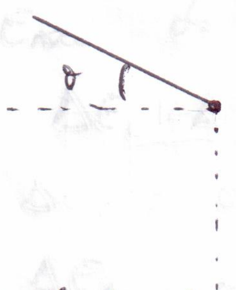
O tempo máximo é $\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{1/8}{2,5} = 50\,ms$

A menor velocidade será portanto

$$\underline{v} = \frac{l}{\Delta t} = \cancel{6\,m/s}\ \ 4\,m/s$$

b) O ponto não tem importância pois a ω é a mesma para todos os pontos da roda.

EXO 2



a) Sistema {haste + Terra}

E_{mec} conservada

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$.

A E_p pode ser calculada simplesmente considerando a massa total da haste concentrada no seu cm. Assim:

$$\left(\frac{1}{2} I \omega^2 - 0\right) + \left(0 - Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = 0$$

com $I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$

Assim $\frac{1}{6} M L^2 \omega^2 = M g \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta$

e $\underline{\omega} = \sqrt{\frac{3g \operatorname{sen}\theta}{L}} = \underline{3,1\ rad/s}$

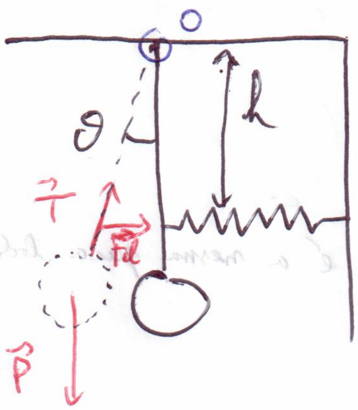
b) $\underline{v = l\omega = 6,2\ m/s}$

c) Utilizando um raciocínio similar a (a)

$$\left(\frac{1}{2}I\omega^2 - 0\right) + \left(-Mg\frac{L}{2} - Mg\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\omega} = \underline{\sqrt{\frac{3g}{L}(1+\text{sen}\,\theta)}} = \underline{4{,}9\ \text{rad/s}}$$

EXO 3



Pêndulo simples : L, M

Sistema {pêndulo}

Eq. dinâmica rotacional em torno do eixo Oz de rotação do pêndulo:

$$\sum \tau_z = I\alpha$$

Sendo $\sum \tau_z = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{el}} + \underset{=0}{\tau_{\vec{T}}} = -MgL\,\text{sen}\,\theta - (k\,h\,\text{sen}\,\theta)\,h\cos\theta$

Para pequenas amplitudes $\text{sen}\,\theta \sim \tan\theta \sim \theta$ e $\cos\theta \sim 1$

Assim $\sum \tau_z = -(MgL + kh^2)\,\theta$

$I = ML^2$ e $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

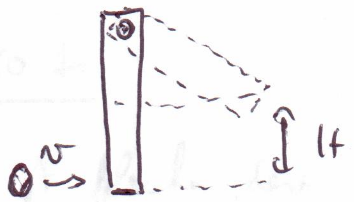
Finalmente:

$$-(MgL + kh^2)\,\theta = ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L} + \frac{kh^2}{ML^2}\right)\theta = 0$$

$$\underline{\omega = \left(\frac{g}{L} + \frac{kh^2}{ML^2}\right)^{1/2}}$$

EXO 4



a) $\underline{L_i} = l_{i\,massa} + \underbrace{l_{i\,barra}}_{=0} = \underline{m v L} = \underline{8 \text{ kg m}^2/\text{s}}$

b) $\underline{I} = I_{massa} + I_{barra} = m L^2 + \frac{1}{3} M L^2$

$= \underline{(m + \frac{1}{3} M) L^2 = 21 \text{ kg m}^2}$

c) Sistema {barra + massa}

$\Sigma \tau_{ext} = 0$ em relação ao ponto O durante a colisão. Assim sendo o momento angular total do sistema L se conserva durante a colisão.

$$L_{antes} = L_{depois} \Rightarrow L_i = L_{após} = I \omega_f$$

$$\Leftrightarrow m v L = (m + \tfrac{1}{3} M) L^2 \omega_f$$

$\Sigma\ \underline{\omega_f} = \frac{m}{m + \frac{M}{3}} \frac{v}{L} = \underline{3{,}75 \text{ rad/s}}$

d) Depois da colisão, vamos analisar o problema com a conservação da Emec do sistema {haste + massa + Terra}.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

Com $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\Delta E_p = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{massa}}}{m g H} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cm da haste}}}{M g \frac{H}{2}} = (m + \tfrac{M}{2}) g H$$

Finalmente $\underline{H} = \frac{1/2\, I \omega^2}{(m + \frac{M}{2}) g} \approx \underline{2{,}5 \text{ m}}$